

Ausgerechnet, ein Zugunglück

von Thorsten Jörgens

Eine Fahrt mit der Eisenbahn ist häufig ein Erlebnis. Auch in Entenhausen ist der Zug ein gern gewähltes Fortbewegungsmittel. Und so zuckelt Familie Duck mit ihm immer wieder gerne durch liebliche Landschaften.



[2]

[14]



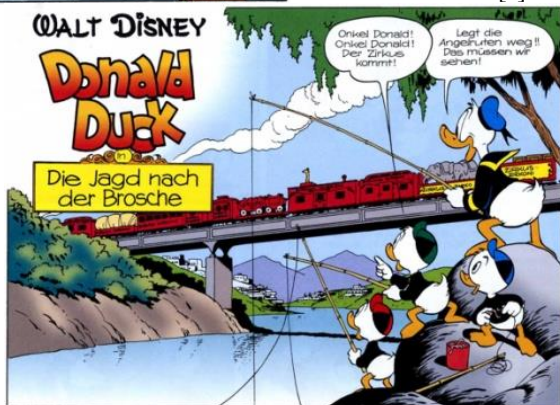
Wer mit der Eisenbahn reist, hat später viel zu erzählen.

Aber nicht nur der schienengebundene Personenverkehr erfreut sich großer Beliebtheit. Zum Transport von Gütern aller Arten greift man gerne auf die Logistik-Angebote der Eisenbahnverkehrsunternehmen zurück.



[18]

[9]



Auch in Entenhausen gehören Güter auf die Schiene.

Entsprechend ehrbar sind Berufe aus dem Eisenbahngewerbe, wie beispielsweise der des Stationsvorstehers, dessen Aufgabe gerne mit Heldenmut assoziiert wird.



[6]

Auf einen Eisenbahner als Onkel kann man stolz sein.

Aber der Bahnbetrieb birgt Gefahren für Leib und Leben. Allenthalben lauern Eisenbahnräuber, wie der gefürchtete Haarige Harry, vgl. [6], und es wird auch von mehreren Beinahezusammenstößen berichtet, in [7] und [11].

[7]



Besondere Berühmtheit erlangte die Zugkatastrophe in „Die Zugkatastrophe“, [11], bei dem Dagobert Duck den Zusammenprall zweier Züge spektakulär durch den Abwurf von Schaumgummimatratten abmilderte und so das Schlimmste verhinderte. Bis heute ist die Ursache nicht restlos geklärt. Handelte es sich um menschliches Versagen oder ist die Technik schuld? Man weiß bisher so wenig! Aber, liebe Leserinnen und Leser, die Erkenntnis naht! Denn der vorliegende Artikel wird diese Frage beantworten. Es werden hierfür bahnbetriebliche Hintergründe beleuchtet und anschließend die Ursache analysiert. Verbunden damit ist ein Exkurs in die Funktionsweise des Entenhausener Eisenbahnbetriebs.



[15]

Die Eisenbahn als bevorzugtes Fortbewegungsmittel.

Bekanntermaßen gelang es Tick, Trick und Track, die Katastrophe im Fichtelgebirge in letzter Sekunde zu verhindern: In Vorbereitung auf ihre Mathearbeit beschäftigten sie sich mit Zug-Zusammenstößen und berechneten kurz darauf mit den neu erworbenen Fähigkeiten Ort und Zeit des Unfalls. Aus diesem Grund ist fer-

ner die Übungsaufgabe der Neffen Thema des vorliegenden Artikels, mitsamt Lösungsweg. Auch wird dargestellt, wie Tick, Trick und Track die Lösung ihrer experimentellen, individuellen Zugfahrt berechnen. Darüber hinaus wird die überraschend simple Rechnung beschrieben, mit der es Tick, Trick und Track gelingt, die Details zur Zugkatastrophe im Fichtelgebirge zu bestimmen.



Wer Mathematik beherrscht, hat das Zeug zum Helden.

Duck'sche Abendbeschäftigung: Vorbild und Mahnung

Die Helden des dramatischen Berichts „Die Zugkatastrophe“ sind Tick, Trick und Track Duck, denen es gelang, den Ort der Kollision im Fichtelgebirge rechtzeitig und präzise zu berechnen. Die hierfür benötigten Kompetenzen erlangen sie durch die engagierte Bearbeitung ihrer Mathematik-Hausaufgabe: Die drei findigen Neffen sind zwar aufgrund ihrer Mathe-Note in der Versetzung gefährdet, dies schmälert aber nicht ihre Motivation zur Lösung einer kniffligen Aufgabe. Dies ist insbesondere insofern bewundernswert, als dass das Duck'sche Onkelhaus den Lernwillen und den schulischen Ehrgeiz nicht fördert.



Wer möchte schon vor einem Bildschirm sitzen, wenn es Mathe-Aufgaben zu lösen gilt?

Die Aufgabenstellung

Die Übungsaufgabe, der sich die Neffen widmen, wird in dem folgenden Panel beschrieben:



Die Neffen bearbeiten ihre Hausaufgabe. Der Erziehungsberechtigte zeigt geringe Anteilnahme.

Zunächst wird nun die verlangte Lösung der Übungsaufgabe vorgestellt, bevor der Lösungsweg zur Berechnung der von den Neffen konstruierten Spielzeugeisenbahnfahrt beschrieben wird. Dieser ist um einiges (!) komplizierter. Aber es gelingt Tick, Trick und Track durch einen cleveren Gedankengang, diese Komplexität zu umgehen. Diese geschickte Vorgehensweise, welche die Neffen an ihr Ziel bringt, wird ebenfalls dargestellt.

Zur besseren Handhabbarkeit der Aufgabe wird die in der Aufgabe beschriebene Situation zunächst formalisiert und es werden für die bekannten und unbekannt GröÙen Variablen eingeführt.



Für Mathematiker sind Eisenbahnen nichts anderes als Variablen in Gleichungen.¹

Gesucht sind für die beiden Eisenbahnen E_1 und E_2 , die bis zur Begegnung an der vorgegebenen Ausweichstelle die Streckenlängen s_1 und s_2 , $s_1 \neq s_2$, zurücklegen und hierfür die Zeit $T > 0$ benötigen, die Geschwindigkeitsfunktionen $v_1 = v_1(t)$ und $v_2 = v_2(t)$ (in Abhängigkeit von der Zeit t , $t \geq 0$). (Es werden nur nicht-rückwärtsfahrende Züge und positive Streckenlängen betrachtet, d.h. $v_1, v_2 \geq 0$, und $s_1, s_2 > 0$.)

Dabei können s_1 und s_2 als Parameter (d.h. als bekannt oder als unbekannt, aber fest vorgegeben) angesehen werden. Dann ist eine allgemeine Lösung in Abhängigkeit von s_1 und s_2 abstrakt berechenbar. Tick, Trick und Track lösen sich von dieser Abstraktion und versuchen, s_1 und s_2 durch Nachmessen zu bestimmen und anschließend eine spezielle Lösung zu finden. (Dazu später mehr.)

v_1 und v_2 sind unbekannt. Sie sind in der Praxis bestimmten Rahmenbedingungen unterworfen, beispielsweise der Beschaffenheit der Züge sowie Umweltfaktoren, wie dem Luftwiderstand. Dies wird in der Übungsaufgabe jedoch offenbar vernachlässigt.

Der Zeitpunkt des Zusammentreffens, T , ist ebenfalls unbekannt, kann aber beliebig vorgegeben werden. Denn es gibt für jeden Wert $T > 0$ eine Lösung für v_1 und v_2 , welche die obige Übungsaufgabe löst.²

¹ Oder wie Johann Wolfgang von Goethe, der berühmter Dichter Stella anatumis, es ausdrückt: „Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.“

² In der Praxis spielen auch hier wiederum die Rahmenbedingungen der beiden Eisenbahnen eine Rolle, die beispielsweise nicht beliebig schnell fahren können. Die Übungsaufgabe geht jedoch auch hierauf nicht ein.

Die Lösung der Übungsaufgabe

Grundsätzlich gilt aus der Physik der Zusammenhang:

$$s(T) = \int_0^T v(t) dt$$

Die Formel sagt aus, dass $s(T)$ die bis zum Zeitpunkt T mit einer Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ zurückgelegte Strecke ist. Die Übungsaufgabe fragt nach „Geschwindigkeiten“ und nicht nach „Geschwindigkeitsfunktionen“. Es sind also jeweils konstante Geschwindigkeiten gefragt.³ Somit kann angenommen werden, dass die Geschwindigkeitsfunktionen $v_1(t)$ und $v_2(t)$ konstant sind, dass sich die Eisenbahnen mithin gleichförmig bewegen. Dies vereinfacht die Rechnung enorm.

Für gleichförmige Bewegungen gilt der folgende, aus der Schule bekannte Zusammenhang, welcher ein Spezialfall des obigen Integrals darstellt:

$$v = \frac{s}{t}$$

Hierbei bezeichnet v die Geschwindigkeit und s die in der Zeit t zurückgelegte Strecke. Die Formel ist gleichbedeutend zu $t = \frac{s}{v}$.

Für die beiden Eisenbahnen folgt, da sie zur selben Zeit starten und ihr Ziel erreichen: $T = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}$. Anders formuliert:

$$v_2 = \frac{s_2}{s_1} \cdot v_1$$

s_1 und s_2 sind Konstanten, v_1 ist veränderlich. Somit ist v_2 eine lineare Funktion in der Variablen v_1 , das heißt: $v_2 = v_2(v_1)$. Das bedeutet, dass für jedes v_1 genau ein v_2 existiert, nämlich $v_2 = \frac{s_2}{s_1} \cdot v_1$, sodass die Übungsaufgabe gelöst ist. v_1 ist dabei abhängig von der beliebigen Wahl von T , denn es ist $v_1 = \frac{s_1}{T}$ immer eine positive reelle Zahl. Insbesondere gibt es also unendlich viele Lösungen für v_1 und v_2 , dargestellt durch die Lösungsmenge:

$$L_{s_1, s_2} = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : v_2 = \frac{s_2}{s_1} \cdot v_1, v_1 > 0 \right\}.$$

Diese Lösungsmenge ist äquivalent ist zu

$$L_{s_1, s_2} = \left\{ \left(1, \frac{s_2}{s_1} \right) \cdot t : t > 0 \right\} = \{(s_1, s_2) \cdot t : t > 0\}.$$

L_{s_1, s_2} beschreibt also eine Gerade durch den Ursprung, dessen Steigung durch s_1 und s_2 bestimmt wird.

Veranschaulichung dieser Aussage

Sind für ein vorgegebenes T die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 Lösungen der Hausaufgabe, so sind $2v_1$ und $2v_2$ eine Lösung für $\frac{1}{2}T$. Entsprechendes gilt für beliebige

³ Eine in der Schulphysik häufig vorgenommene Vereinfachung.

positive Faktoren. Anschaulich ist dies klar: Fahren zwei Eisenbahnen mit jeweils doppelter Geschwindigkeit aufeinander zu, so treffen sie sich bereits nach der halben Zeit.

Abgrenzung der Aufgabe

Der Abstraktheitsgrad der Lösung mag erstaunen, schließlich ist die Hausaufgabe der folgenden Fragestellung sehr ähnlich, welche in „Der Rinderkönig“, [7], überliefert ist:



Im Abstand von S Kilometern starten in entgegengesetzten Richtungen eine Lok und ein Waggon Dynamit mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 . Wann und wo treffen sie aufeinander?

Diese Fragestellung unterscheidet sich signifikant von der Hausaufgabe aus dem Bericht „Die Zugkatastrophe“. Insbesondere ist die Antwort auf diese Frage eindeutig, denn Lok und Waggon treffen zum Zeitpunkt $T = \frac{S}{v_1 + v_2}$ aufeinander, wenn sie die Strecken $s_1 = \frac{S}{v_1 + v_2} v_1$ bzw. $s_2 = \frac{S}{v_1 + v_2} v_2$ zurückgelegt wurden.

Tick, Trick und Tracks Aufgabe

Die drei Neffen lösen die Übungsaufgabe nicht theoretisch am Schreibtisch, mit Bleistift und Papier. Sie verfolgen einen praxisbezogenen, experimentellen Ansatz. Dadurch verzichten sie auf die Annahme der Hausaufgabe zur gleichförmigen Bewegung. Dies führt, wenn man ihre Vorgehensweise mathematisch-physikalisch durchexerziert, zu einer erheblich komplexeren und komplizierteren Lösung.

Hinweise auf die Problemstellung, mit der sich Tick, Trick und Track konfrontiert sehen, und somit auf deren Lösungsweg liefert das folgende Panel:



Die dargestellte Situation macht deutlich, dass sie die Übungsaufgabe nicht im einfachen, allgemeinen Fall lösen, sondern in ihrer ganz speziellen Situation mit der individuell gestalteten Schienenstrecke und ihren beiden Eisenbahnen mit Federmotor. Da die beiden Eisenbahnen auf unterschiedliche Art und Weise aufgezogen werden (von hinten bzw. von unten), unterscheiden sie sich in ihrer Bauart und möglicherweise auch in weiteren, für

die Berechnung des Zusammenstoßes relevanten Details (beispielsweise der Federstärke der Federmotoren). Ferner sorgen die Federmotoren dafür, dass die Geschwindigkeitsfunktionen mitnichten konstant sind, da sich die Fahrt in eine Beschleunigungsphase und eine Roll- bzw. Abbremsphase unterteilt. Dies beschreibt insgesamt eine wesentlich komplexere Situation.



Exemplarische Darstellung eines Federmotors. Über die Schraube wird die Feder gespannt. Beim Abrollen treibt deren Bewegung das Zahnrad an.

Für Tick, Trick und Track besteht die Herausforderung nun darin, neben der Geschwindigkeit auch die erforderlichen Auslenkungen der antreibenden Federn zu berechnen. Dieses Problem, welches in seiner Komplexität weit über die eigentliche Hausaufgabe hinausgeht, wird für die folgenden Überlegungen als „Tick, Trick und Tracks Aufgabe“ bezeichnet.

Zunächst sei festgehalten, dass auch in dem Fall nicht-konstanter Geschwindigkeitsfunktionen für jede Wahl von T Lösungsfunktionen $v_1(t)$ und $v_2(t)$ existieren, sodass Tick, Trick und Tracks Aufgabe gelöst wird – zumindest theoretisch, wenn einschränkende Rahmenbedingungen durch die Praxis außer Acht gelassen werden.⁴ Beispielsweise kann es abhängig von den Streckenlängen passieren, dass beide Federmotoren nicht ausreichend aufgezogen werden können, damit die Ausweichestelle überhaupt erreicht wird. Auch kann für kleine Werte von T keine Lösung existieren, wenn die Eisenbahnen nicht schnell genug fahren können, beispielsweise aufgrund von Beschränkungen des Motors oder durch die Wahl der Strecke, z.B. aufgrund von engen Kurven.

Mit diesen Vorüberlegungen kann nun die Zugfahrt im Detail betrachtet werden. Dabei werden im Folgenden die Beschleunigungsphase und die Roll- bzw. Abbremsphase separat diskutiert. Die Überlegungen erfolgen für eine Lok, sind aber analog für die andere.

Die Roll- bzw. Abbremsphase

Zunächst die Roll- bzw. Abbremsphase, da diese leichter zu behandeln ist. Sie schließt sich an die Beschleunigungsphase an. Die auf die sich bewegende Lok wirken-

den Kräfte entstehen durch den Luftwiderstand und den Rollwiderstand. Der Luftwiderstand ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit und sei als $A \cdot v^2$ bezeichnet (mit einer Konstanten A , die von Eigenschaften der Lok abhängt). Der Rollwiderstand ist konstant, da die Schienen auf ebenem Boden aufgebaut sind. Dieser wird im Folgenden durch die Konstante B beschrieben. Für die Kräftegleichung der an eine Lok angreifenden Kräfte gilt somit:⁵

$$m \cdot a(t) = m \cdot v'(t) = -A \cdot v(t)^2 - B.$$

Dies ist eine Differentialgleichung in der Variablen v .

Ist T_0 derjenige Zeitpunkt, an dem die Beschleunigung endet und die Maximalgeschwindigkeit v_{max} erreicht wird, $v_{max} = v(T_0)$, so gilt es, für die Beschreibung der Roll- bzw. Abbremsphase das folgende Randwertproblem zu lösen:

$$A \cdot v(t)^2 - m \cdot v'(t) + B = 0, \text{ für } t \geq T_0$$

$$v(T_0) = v_{max}$$

Dieses Randwertproblem besitzt die Lösung:⁶

$$v(t) = \sqrt{\frac{B}{A}} \tanh(K \cdot m^2 \sqrt{AB} + t \cdot m^2 \sqrt{AB})$$

Dabei ist K diejenige reelle Zahl, für die $v(T_0) = v_{max}$ gilt.

Die Beschleunigungsphase

Die Beschleunigungsphase ist wesentlich komplexer, da neben den bremsenden Kräften auch eine nichtlineare Beschleunigungskraft wirkt, nämlich die des Federmotors. Das Prinzip eines Federmotors beruht darauf, dass sich eine ausgelenkte Feder in ihre Ruhelage zurück bewegt. Die Bewegung der Feder überträgt sich über ein Getriebe auf die antreibende Achse und von dort über die Räder auf die Schiene.

Die Auslenkung $y = y(t)$ der (Spiral-)Feder genügt dabei der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung, welche eine freie, gedämpfte Schwingung beschreibt:

$$Dy + cy' + my'' = 0.$$

Dabei sind D die Federkonstante, c der Widerstandskoeffizient der Lok (Annahme: Der Widerstand ist proportional zur Geschwindigkeit y')⁷ und m ist die zu bewegende Masse. Ferner gelten die Randbedingungen $y(0) > 0$, d.h. die Feder ist zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgelenkt, und $y'(0) = 0$, d.h. die Feder befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht in Bewegung. Im Fall einer Dreh-

⁵ Dabei wurde ausgenutzt, dass für die Beschleunigung $a(t)$ gilt: $a(t) = v'(t)$.

⁶ Diese Fußnoten dieses Artikels sind zu schmal, um die Rechnungen zur Lösung der verschiedenen Differentialgleichungen zu fassen. Der geneigte Leser sei auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen.

⁷ Eine Vereinfachung, die in diesem Zusammenhang häufig getroffen wird.

⁴ Die Begründung dieser Aussage liefert der Zwischenwertsatz aus der Analysis. Etwas vereinfacht kann man sich dazu Folgendes vorstellen: Würde eine mögliche Kollision die Zugfahrten nicht unterbrechen, so würde E_1 irgendwann beim Startpunkt von E_2 ankommen und E_2 am Startpunkt von E_1 . Folglich muss es irgendwann einen Ort gegeben haben, an dem sich die Züge begegneten.

schwingung, wie bei einem Federmotor, entspricht y dem Winkel der Auslenkung.

$y(0)$, die Auslenkung der Feder zum Zeitpunkt $t = 0$, ist die von Tick, Trick und Track gesuchte Variable, um die Feder korrekt ausulenken und die Loks mit der richtigen Geschwindigkeit sausen zu lassen (die jedoch für die beiden Loks unterschiedlich sein kann).

Die Lösung der obigen Differentialgleichung mit Randbedingungen lautet:

$$y(t) = y(0) \cdot e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left(\cos \left(t \cdot \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \right) + \frac{c}{2m \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \cdot \sin \left(t \cdot \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \right) \right)$$

Die Geschwindigkeit der Lok wird jedoch nicht allein durch den Federmotor beeinflusst, sondern auch durch den Luft- und den Rollwiderstand (analog zur Roll- und Abbremsphase). Zusätzlich gilt es, das Übersetzungsverhältnis von Motor zur Schiene zu berücksichtigen, bezeichnet als C . Dann gilt insgesamt für die Kräftegleichung der Lok:

$$m \cdot a(t) = m \cdot v'(t) = C \cdot y'(t) - A \cdot v(t)^2 - B.$$

Außerdem gilt: $v(0) = 0$.

Unglücklicherweise ist diese Differentialgleichung mit Randwertproblem für den Autor dieses Artikels zu komplex und sein Denkorgan verfügt nicht über ausreichend Kapazität, um sie zu lösen. Aus diesem Grund werden an dieser Stelle die Luft- und Rollwiderstände vernachlässigt. $A = 0$, $B = 0$. Zack! Die gesuchte Geschwindigkeitsfunktion ist in diesem Fall:

$$v(t) = C \cdot y'(t).$$

Insbesondere gilt dann offenbar $v(0) = C \cdot y'(0) = 0$, wie gefordert.

Wie bereits oben erwähnt, endet die Beschleunigungsphase zum ersten Zeitpunkt $t = T_0$, zu dem $y(T_0) = 0$ gilt. Denn dann befindet sich die antreibende Feder in ihrer Ruhelage. Die Beschleunigungsphase endet und die Geschwindigkeit der Eisenbahn ist nun maximal. Es gilt $v_{max} = v(T_0)$.

Die Geschwindigkeitsfunktion

Insgesamt lautet die Geschwindigkeitsfunktion einer Spielzeuglok mit Federmotor (unter den oben getroffenen Annahmen) also:

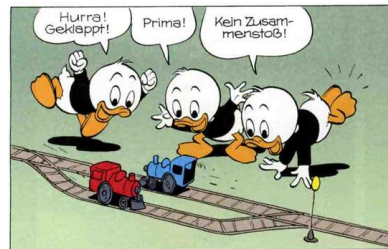
$$v(t) = \begin{cases} C \cdot y'(t), & 0 \leq t \leq T_0 \\ \sqrt{\frac{B}{A}} \tanh(K \cdot m^2 \sqrt{AB} + t \cdot m^2 \sqrt{AB}), & T_0 < t \leq T \end{cases}$$

Die Geschwindigkeitsfunktionen v_1 von E_1 und v_2 von E_2 sind Spezialfälle dieser allgemeinen Geschwindigkeitsfunktion, bezeichnet als $v_{1,T}$ und $v_{2,T}$, für bestimmte Werte für A , B , C , D , K , c und m (evtl. mit verschiedenen Werten für E_1 und E_2). Mit diesen Geschwindig-

keitsfunktionen müssen Tick, Trick und Track nun für ein beliebig vorgegebenes T (für das eine Lösung in der oben dargestellten Form existiert) das Gleichungssystem

$$s_1 = \int_0^T v_1(t) dt \quad s_2 = \int_0^T v_2(t) dt$$

nach den Auslenkungen der antreibenden Federn, $y_1(0)$ und $y_2(0)$ auflösen. Dabei sind s_1 bzw. s_2 diejenigen Entfernungen, die E_1 bzw. E_2 bis zum Ausweichpunkt zurücklegen müssen. Dies ist gewiss kein einfaches Unterfangen.



Anmerkung: Wie das obige Panel zeigt, befinden sich beide Züge an der Ausweichstelle in Bewegung. Es gilt also: $v_{1,T}(T), v_{2,T}(T) > 0$. Durch diese Randbedingungen ist die Lösung von Tick, Trick und Tracks Aufgabe nicht eindeutig lösbar. Dies wäre anders, wenn für $i = 1,2$ gälte: $v_{i,T}(t) > 0$ für $0 < t < T$ und $v_{i,T}(T) = 0$.

Die Lösung von Tick, Trick und Track

Aufgrund der Komplexität erscheint es unwahrscheinlich, dass Tick, Trick und Track das oben dargestellte Gleichungssystem lösen. Wie haben sie also ihre Lösung berechnet?

Sie haben zu ihrer Aufgabe einen sehr eleganten und cleveren Ansatz gefunden, einen Trick, um die Komplexität erheblich zu reduzieren. Ein Hinweis darauf liefert das folgende Panel:



Tick, Trick und Track berechnen offenbar die Anzahl der benötigten Umdrehungen des Antriebsrades. Dieser Wert ist unabhängig von der späteren Geschwindigkeit der Lok. Der Zusammenhang lautet: $s = U \cdot N$, wobei s die Streckenlänge, U den Umfang des Rades⁸ und N die Anzahl seiner Umdrehungen beschreibt (N kann eine nicht-natürliche Zahl sein).⁹ Folglich berechnen Tick, Trick und Track, dass das Antriebsrad der einen Lok $\frac{6420}{182} \approx 35,3$ Umdrehungen vollführt, bis die Ausweich-

⁸ Der Umfang wird von den Neffen durch Abrollen bestimmt.

⁹ Die Formel kann dazu dienen, eine der drei folgenden Größen aus den beiden anderen zu berechnen: s , U , N . Sie kann also beispielsweise genutzt werden, anhand der Anzahl der Umdrehungen und des Radumfangs eine Streckenlänge zu bestimmen (Funktionsweise eines Opisometers).

stelle erreicht ist. Für die andere Lok wird ebenso verfahren.¹⁰

Der Ansatz von Tick, Trick und Track funktioniert nun dergestalt, dass sie die Zugfahrten darauf auslegen, dass die Beschleunigungsphasen genau an der Ausweichstelle enden. Dies funktioniert unter der Voraussetzung, dass die Massen und die Federkonstanten der beiden Eisenbahnen übereinstimmen: $m_1 = m_2 = m$, $D_1 = D_2 = D$. Denn in diesem Fall ist die Schwingungsdauer der antreibenden Federn identisch und unabhängig von der

Auslenkung, nämlich $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$.¹¹ Nun können die erforderlichen Auslenkungen der Federn, $y_1(0)$ und $y_2(0)$, elementar berechnet werden. Denn wenn die Antriebsräder an der Ausweichstelle N_1 bzw. N_2 Umdrehungen ausgeführt haben und wenn die Übersetzungsverhältnisse von Feder zu Rad mit C_1 bzw. C_2 bezeichnet werden, dann müssen, da der Antrieb über das Abrollen der Federn erfolgt, die antreibenden Spiralfedern $\frac{N_1}{C_1}$ bzw. $\frac{N_2}{C_2}$ Umdrehungen machen. Gemäß diesen Überlegungen muss die Feder von Lokomotive 1 um $\frac{N_1}{C_1}$ Umdrehungen aufgezogen werden. Alternativ, da der Wert für $y_1(0)$ auch als Winkel ausgedrückt werden kann, muss die Feder um $y_1(0) = \frac{N_1}{C_1} \cdot 360^\circ$ gedreht werden. Analoges gilt für die Feder von Lokomotive 2.



Das Geniale an dieser Lösung: Sie kommt ohne die Berechnung von Geschwindigkeiten aus, die sich, wie im vorherigen Kapitel beschrieben, als sehr komplex erweisen. Das Paradoxe an dieser Lösung: Sie löst nicht die Übungsaufgabe, die nach Geschwindigkeiten fragt, sondern sie beantwortet einzig die Frage, wie die Federmotoren aufgezogen werden müssen, damit sich die Lokomotiven an der Ausweichstelle treffen.

Ob die Lehrkraft deswegen mit der Lösung zufrieden sein wird? Zumindest aber wurde offenbar der Umgang mit Gleichungen mit mehreren Unbekannten erfolgreich geübt.

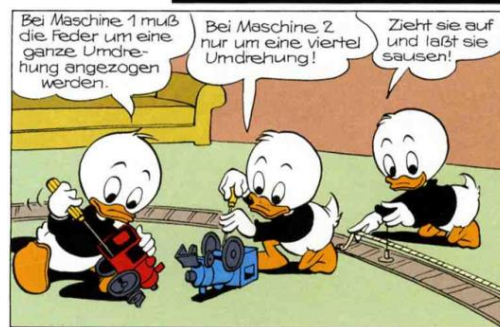


Es mag im Übrigen erstaunen, dass die Federn nur sehr wenig aufgezogen werden müssen. Dies ist aber durchaus nicht unmöglich, wenn das Übersetzungsverhältnis des Motors entsprechend groß und die antreibenden Federn ausreichend stark sind.

Das Messen der Streckenlängen s_1 und s_2

Ein Knackpunkt ist die Bestimmung der Streckenlängen s_1 und s_2 . Und in der Tat ist das Ausmessen der mehrfach gekrümmten Strecke nicht trivial und deswegen Inhalt des folgenden Abschnitts.

Die Neffen haben gekrümmte Schienenstücke verwendet und denken nun darüber nach, wie sie die Längen der kurvigen Strecke korrekt messen. Der Vorschlag eines der Neffen lautet, an der Innenseite zu messen, woraufhin ein anderer Neffe an der Außenseite misst. Tatsächlich ist weder das eine noch das andere korrekt – auch wenn Tick, Trick und Track mit ihren Überlegungen grundsätzlich nicht verkehrt liegen. Denn in der Tat bringt eine starre Achse Herausforderungen mit sich.



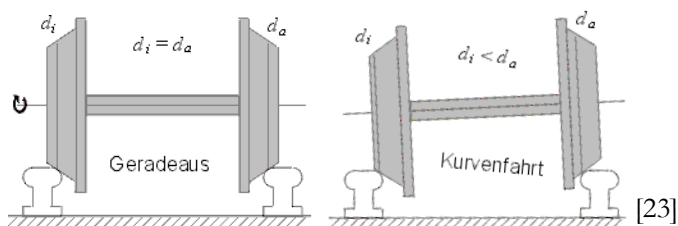
Was ist Innen, was ist Außen? Man scheint sich nicht einig zu sein.¹²

¹⁰ Wobei nach dieser Rechnung eine neuerliche Messung erfolgt und der korrekte Zahlenwert somit ein anderer ist.

¹¹ In Übereinstimmung zum vorherigen Kapitel ist T_0 dann derjenige Zeitpunkt, an dem die Beschleunigungsphase endet.

¹² Von einem mathematischen Standpunkt aus ist das eine durchaus interessante Frage und die Tatsache, dass sich „Innen“ und „Außen“ unterscheiden, ist verblüffend schwierig zu beweisen. Der interessierte Leser sei auf den Jordan'schen Kurvensatz verwiesen.

Ist eine Kurve ausreichend schwach gekrümmt, d.h. ist der Kurvenradius ausreichend groß, so kommt es nicht zu dem im Bericht erwähnten Rutschen der Räder. Denn die Räder einer Eisenbahn sind konisch geformt, d.h. der Innenradius eines Rades ist kleiner als dessen Außenradius. In einer Kurve treibt die Fliehkraft das Fahrzeug und den Radsatz nach außen und die Achse neigt sich. Hierdurch unterscheiden sich die Radien an den Aufsatzen zur Schiene. Aus diesem Grund kann das auf der Kurveninnenseite liegende Rad in der gleichen Zeit und mit der gleichen Zahl an Umdrehungen eine kürzere Strecke zurücklegen als das äußere Rad, welches an der Kurvenaußenseite eine längere Wegstrecke zurücklegt. Der Zug kommt ohne rutschende Räder um die Kurve.



Ist eine Kurve enger, d.h. stärker gekrümmt, so können die konischen Räder die unterschiedlich langen Wegstrecken zwischen Außenschiene und Innenschiene nicht mehr ausgleichen. Die äußeren Räder werden deswegen mitgezogen und die inneren Räder drehen durch. Das Resultat ist ein Quietschen, wie es beispielsweise bei Straßenbahnen beobachtet werden kann.

Der Krümmung von Kurven, welche auf diese Weise befahren werden können, ist eine physikalische Grenze gesetzt. Noch engere Kurven sind jedoch ebenfalls möglich. Dies gelingt mit sogenannten Deutschlandkurven (auch: Auflaufkurven), bei denen sich das äußere Rad auf den Spurkranz aufstellt.

Insgesamt folgt: Die Länge der Gleisstrecke muss in der Gleismitte gemessen werden.

Der Denk- bzw. Messfehler von Tick, Trick und Track fällt jedoch nicht zwingend ins Gewicht. Wenn die Abweichungen der gemessenen Längen der Linkskurven und Rechtskurven einer Richtung zu den korrekten Längen in Summe geringer sind als die Länge der Ausweichstrecke, dann verfälscht die fehlerhafte Messung das Ergebnis nicht ausreichend und der Fehler fällt nicht ins Gewicht.

Das Drama im Fichtelgebirge

Das eigentliche Drama des Berichts „Die Zugkatastrophe“ ist nicht die Matheaufgabe, für deren Bearbeitung bis spät in die Nacht hinein geschuftet wird. Auch nicht das häusliche, nämlich dass der erziehungsberechtigte Onkel seine Schützlinge davon abhalten will, für die Schule und für das Leben zu lernen. Das Drama spielt sich im Fichtelgebirge ab, laut dem Stadtplan von Entenhausen, [20], auf dem Streckenstück zwischen dem Bahnhof „Naturschutzpark Bärenforst“ und dem Bahn-

hof Gänseburg. Dort rasen eine führerlose Lokomotive und ein vollbesetzter Eilzug, der planmäßige verkehrende E33, aufeinander zu und aufgrund von widrigen Witterungsverhältnissen und einer Signalstörung scheint eine Katastrophe unvermeidbar.

Tick, Trick und Track gelingt es jedoch zur allgemeinen Überraschung, den Unglücksort und den Unglückszeitpunkt exakt zu bestimmen und die Katastrophe mit Dagoberts Hilfe zu verhindern. Bevor deren Rechnung nachvollzogen wird, soll in diesem Kapitel zunächst der Unglückshergang rekonstruiert werden. Dazu wird zunächst ein Exkurs in das Eisenbahnwesen in und um Entenhausen unternommen. Der Zusammenhang vieler der dort erwähnten Informationen zum vorliegenden Artikel erschließt sich erst in den darauffolgenden Kapiteln.

Exkurs in die Welt der Eisenbahn

Die Eisenbahn ist etwas für Romantiker. Die Dampflok tutet, das Signal bewegt sich und mit Geschnaufe setzt sich der Zug in Bewegung. Als Passagier sitzt man entspannt in seinem Sessel und genießt die Fahrt. Aus technischer und betrieblicher Sicht ist eine Zugfahrt jedoch komplizierter. Fahrwege müssen gesichert, Signale gestellt und Züge und Personal disponiert werden. Bei Güterzügen muss zusätzlich der richtige Waggon-Typ zur richtigen Zeit an der richtigen Stelle sein, damit die Ware korrekt verladen und Züge wie vom Transportplan vorgesehen zusammengestellt werden können.



Viele Berichte liefern Einblicke, wie der Eisenbahnverkehr auf Stella anatum abläuft, insbesondere der Bericht „Die Zugkatastrophe“. Es gibt Personenzüge unterschiedlicher Bauweise sowie Güterwagen unterschiedlichen Typs. Die verschiedenen angebrachten Signale regeln deren Fahrt. All diese Informationen werden im Rahmen dieses Exkurses zu einem kleinen Gesamtbild zusammengefügt. Der Fokus dieses Artikels liegt jedoch woanders, sodass ein paar Fragen für die weitere Forschung offen bleiben müssen.

Die in und um Entenhausen verkehrenden Eisenbahnen, Triebfahrzeuge und Waggonen sind vielfältig und diese Vielfalt soll im Folgenden kurz dargestellt werden.

Die Lokomotiven sind in vielen Berichten dampfbetrieben, was eine entsprechende Infrastruktur mit Wasserkränen voraussetzt. Aber es gibt auch modernere Dieselloks.



Ein Wasserkran (mit Wasserturm) zur Versorgung von Dampflokomotiven mit Wasser für die Dampferzeugung.



Eine Dampflok (etwas antiquiertes Modell).



Eine moderne Diesellok.

Bei den eingesetzten Güterwägen können verschiedene Bauarten unterschieden werden.



Offene Güterwagen. Oben: Flachwagen mit Seitenborden zum Transport von witterungsunempfindlichem Schüttgut; unten: mit einer Spezialkonstruktion zum Transport von Ziegen.



Gedeckte Güterwagen mit zentraler Seitentür.

Bei Personenzügen kann mindestens zwischen einstöckigen und zweistöckigen Wagen unterschieden werden.



Der mittlere Waggon ist doppelstöckig, die anderen einstöckig.

Die Züge verkehren im Blockabstand und die einzelnen Streckenblöcke, die Streckenabschnitte zwischen zwei Blockstellen, werden durch stationäre Signale gesichert. Hierfür sind Flügelsignale installiert, die zu Beginn eines Streckenblocks dem Triebfahrzeugführer einen Halt, die Durchfahrt oder die Durchfahrt mit reduzierter Geschwindigkeit anzeigen.

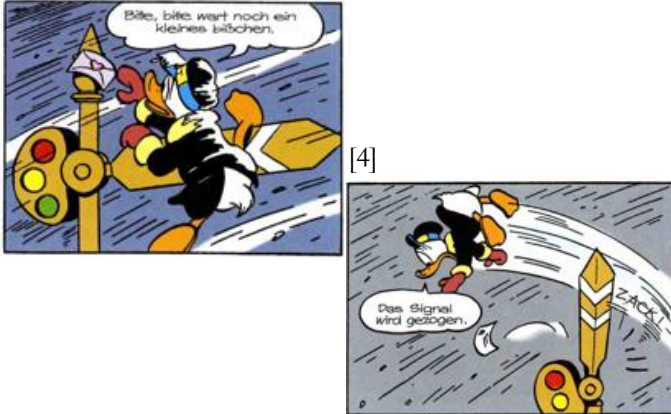


Beispiele für Signale (Flügelsignale). Die Laternen mit den beweglichen Farbgläsern machen die Signale auch in der Nacht erkennbar. Man beachte, dass die Flügel unterschiedliche Formen aufweisen.

Zeigt der Flügel nach oben, wird „Fahrt“ signalisiert. Hierfür muss es durch den Fahrdienstleiter (seit 2023 auch: Zugverkehrssteuerer) in die entsprechende Halteposition gezogen werden. Passiert ein Zug das Signal oder wird der zugehörige Streckenabschnitt anderweitig blockiert, so fällt das Signal zurück in die Halteposition „Halt“. Einige Flügel signale haben zudem eine dritte Position für „Langsamfahrt“.



Diese Scheibensignale mit Wendescheibe geben also offenbar die Stellung der jeweils zugehörigen Weiche an. In „Der heldenmütige Stationsvorstand“, [6], wird jedoch auch von einem Scheibensignal auf einem eingleisigen Streckenstück berichtet, einem Streckenstück ohne Weiche. Dessen Bedeutung ist aktuell leider unbekannt.



Der Fahrdienstleiter (nicht im Bild) zieht das Signal und bewegt das Signal von „Langsamfahrt“ (gelb) in „Fahrt“ (grün).

Es wird jedoch nicht nur von Flügel signalen berichtet, sondern auch von Scheibensignalen mit Wendescheibe:



Scheibensignal mit unbekannter Funktion.



[6]

[19]

Kreuzsignale dienen der Markierung von Bahnübergängen, unabhängig davon, ob mit oder ohne Schranke.



[3]



[7]

Oben und Mitte: Die Wendescheiben stehen senkrecht zum Gleis. Unten: Die Wendescheibe steht parallel dazu.

Die Wendescheiben werden von den Weichenstellern bedient. Zu deren Aufgabe gehört es ferner, Weichen zu stellen:

Der signalgeführte Eisenbahnbetrieb im Blockabstand ist uns aus dem Anthropoversum wohl bekannt. Die einzelnen Streckenblöcke werden durch Blockstellen getrennt, an denen sich die Signale befinden. Durch eine logische Abhängigkeit der Signale untereinander wird sichergestellt, dass sich jeweils nur ein Zug innerhalb eines Streckenblocks aufhält. So sind Züge vor entgegenkommenden Zugfahrten geschützt. Insbesondere auch das Aufahren von Zügen, beispielsweise bei einer Notbremsung, wird verhindert. Die logische Abhängigkeit zwischen den Signalen garantiert ferner, dass dem Fahrdienstleiter beim Einstellen und Sichern des Fahrwegs eines Zuges kein Fehler unterläuft. Dem Triebfahrzeugführer wiederum zeigen Signale an, ob der vorausliegende Streckenabschnitt befahren bzw. nicht befahren werden darf, und sie sorgen dafür, dass ein nicht freigegebener Streckenblock nicht versehentlich befahren wird, indem gegebenenfalls zugehörige punktuelle Zugbeeinflussungssysteme im Gleisbett beim Überfahren eines Halt-zeigenden Signals das Triebfahrzeug zu einer automatischen Vollbremsung bis zum Stillstand veranlassen.

Im Fall einer Signalstörung kann der Triebfahrzeugführer vom zuständigen Fahrdienstleiter einen fernmündlichen Befehl zur „Zugfahrt mit besonderem Auftrag“ erhalten und ohne Zwangsbremmung das Halt-zeigende Signal passieren. In diesen Fällen muss nun in der Regel der Triebfahrzeugführer die Gleisfreimeldung übernehmen und der Zug im Sichtfahrbetrieb verkehren. Für die Kommunikation zwischen Triebfahrzeugführer und Fahrdienstleitung befinden sich stationäre Fernsprecher in unmittelbarer Nähe zum Hauptsignal.



[10]

[5]



Kästen am Signalmast. Vermutlich handelt es sich dabei um montierte Fernsprecher.

Mit diesem Vorwissen ausgestattet kann nun die Katastrophe im Fichtelgebirge rekonstruiert werden.

Rekonstruktion des Zugunglücks

Die folgenden Panels liefern Informationen über den Unglückshergang, bei dem eine führerlose Lokomotive und ein nicht-führerloser Personenzug aufeinander zu- steuern.



Das Signalsystem ist blockiert. Der Fahrdienstleiter kann die Signale somit nicht aus der Halteposition „Fahrt“ in die Halteposition „Halt“ zurücksetzen, um somit einen Zug zum Anhalten zu bewegen bzw. um mittels punktuelltem Zugbeeinflussungssystem indirekt eine Zwangsbremmung zu veranlassen.¹³



Der Eilzug verkehrt im Sichtfahrbetrieb.

Auf Basis dieser Informationen und mit dem Vorwissen aus dem Exkurs kann der Unglückshergang rekonstruiert werden. Das Zugunglück spielte sich wie folgt ab:

1. Als sich die führerlose Lokomotive in Bewegung setzt, hat der zuständige Fahrdienstleiter den Fahrweg von E33 noch nicht eingestellt. Stattdessen ist der Fahrweg für die (führerlose) Lokomotive eingestellt und gesichert, sodass dessen Signale „Fahrt“ anzeigen und die für E33 entsprechend „Halt“. Möglicherweise war auf dem eingleisigen Streckenabschnitt im Fichtelgebirge kurz vor Durchqueren von E33 eine außerplanmäßige Fahrt eines Lokomotivzugs geplant (z.B. um die Lok an einer anderen Betriebsstelle bereitzustellen).
2. Die führerlose Lokomotive setzt sich in Bewegung und durchquert die Einfahrt zum eingleisigen Streckenstück. Die Signale der Gegenrichtung stehen weiterhin auf „Halt“.
3. Der Fahrdienstleiter hat keine Kenntnis von der Fahrt der Lokomotive und möchte nun den Fahrweg für E33 einstellen. Aufgrund der Durchfahrt der führerlosen Lokomotive ist dieser jedoch blockiert. Das Signal zur Einfahrt in das eingleisige Streckenstück steht für E33 auf „Halt“, als E33 dieses erreicht.
4. Der Triebfahrzeugführer von E33 sieht das Halt-zeigende Signal und meldet dies dem Fahrdienstleiter mithilfe des stationären Fernsprechers, welcher sich in der Nähe des Hauptsignals befindet. Vermutlich weist er darauf hin, dass es ungewöhnlich sei, dass sich das Signal in der Halteposition „Halt“ befindet, da er keinen entgegenkommenden Zug erwarte.
5. Der Fahrdienstleiter erteilt daraufhin einen fernmündlichen Befehl zur „Zugfahrt mit besonderem Auftrag“. E33 fährt nun in das eingleisige Streckenstück ein und verkehrt im Sichtfahrbetrieb.
6. Der Fahrdienstleiter erfährt kurz darauf von der entgegenkommenden führerlosen Lokomotive. Die Kommunikation der Fahrdienstleitung zu E33 ist aufgrund der schlechten Witterungsbedingungen jedoch gestört und eine Kontaktaufnahme ist nicht möglich.
7. Aufgrund des Ausfalls des Signalsystems kann die Fahrdienstleitung die Fahrt-anzeigenden Signale für die führerlose Lokomotive nicht in die Stellung

¹³ Ohne Existenz der punktuellen Zugbeeinflussungssysteme, durch die ohne direktes menschliches Einwirken ein Zug abgebremst werden kann, ist es unerheblich, ob die Fahrdienstleitung Signale bewegen kann. Denn Halt-zeigende Sig-

nale bringen dann lediglich nicht-führerlose Züge zum Stillstand.

„Halt“ bringen. Es ist ihr dadurch unmöglich, eine Zwangsbremung des führerlosen Zuges durch die punktuellen Zugbeeinflussungssysteme im Gleis zu veranlassen.

- Die Fahrdienstleitung geht von einer Kollision der beiden entgegenkommenden Züge aus.



Der Fahrdienstleitung steht der Schrecken ins Gesicht geschrieben.

Die Schuldfrage

Wer trägt nun die Schuld an der Beinahekatastrophe? War es technisches oder menschliches Versagen?

Auf der einen Seite gibt es die führerlose Lok. Es ist unklar, warum sie sich in Bewegung setzt respektive ungesteuert im Eisenbahnnetz verkehrt. Denkbar ist ein Ausfall des Bremssystems, zum Beispiel aufgrund von Verschleiß oder defekten Bremsleitungen. Eine alternative Ursache könnte sein, dass der Lokführer vor Verlassen der Lok die Bremse nicht ordnungsgemäß festgestellt hat. Auch andere, kuriosere Situationen sind möglich; man denke nur an den „Vorfall CSX 8888“ von 2001, bei welcher der Lokführer die fahrende Maschine verließ.

In Summe ist an dieser Stelle nicht entscheidbar, ob der Mensch oder die Maschine für die führerlos verkehrende Lok verantwortlich ist.

Es passiert jedoch ein weiterer, schwerwiegender Fehler: Bevor der Schnellzug E33 in das eingleisige Streckenstück, das von der entgegenkommenden Lok blockiert ist, einfährt, erhält dessen Triebfahrzeugführer den fernmündlichen Befehl zur „Zugfahrt mit besonderem Auftrag“. Die Fahrdienstleitung darf diesen nur dann erteilen, wenn sie sich davon überzeugt hat, dass der Fahrweg frei ist. In diesem Fall war er das nicht, denn es war eine entgegenkommende Zugfahrt geplant. Ganz offensichtlich hat die Fahrdienstleitung also nicht davon überzeugt, dass eine solche entgegenkommende Zugfahrt nicht stattfindet, bevor sie die Freigabe zur Querung des Halt-zeigenden Signals erteilte.

Ohne dieses schwere Versäumnis und ohne diese Fehlentscheidung der Fahrdienstleitung wäre trotz führerloser Lokomotive kein Zugzusammenstoß erfolgt. Die Schuld für die Katastrophe, die leicht katastrophale Ausmaße hätte annehmen können, liegt somit eindeutig bei der Fahrdienstleitung. Unabhängig von der führerlosen Lokomotive liegt dem Unglück im Fichtelgebirge also menschliches Versagen zugrunde.

Non scholae, sed vitae discimus.¹⁴

Die sich ihrer Verantwortung bewusste Fahrdienstleitung entscheidet sich im Angesicht der sich anbahnenden Katastrophe, die Verantwortung abzugeben: Sie bittet den berühmten Mathematiker Prof. Cosinus um Hilfe. Da er telefonisch nicht erreichbar ist, versuchen sie es über eine Eilmeldungen im TV.

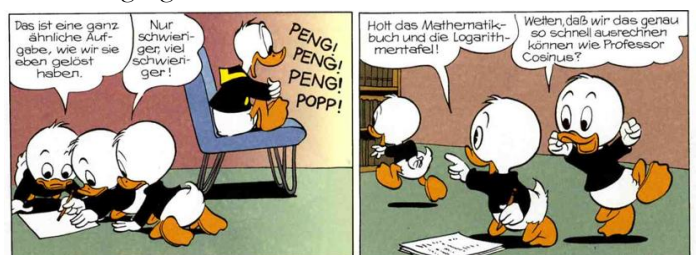


Weder die Fahrdienstleitung noch der Sprecher im Fernsehen können jedoch zwischen relevanten und irrelevanten Informationen unterscheiden und geben deswegen alle verfügbaren Informationen durch:



Für einen aufmerksamen Schüler handelt es sich um eine klassische Textaufgabe.

Tick, Trick und Track erkennen eine Analogie zur Übungsaufgabe. Es ist eine Freude zu sehen, mit welchem Eifer sie sich auf die Rechnung stürzen. Sogar die Logarithmentafel wird vorsorglich aus dem Duck'schen Bücherregal geholt.¹⁵



Mathematik: Eine Quelle nie versiegenden Vergnügens.

Tick, Trick und Track vermuten, dass das Problem viel komplizierter sei als ihre Hausaufgabe. Auf Basis der uns zur Verfügung stehenden Informationen ist sie zwar anders gelagert, gestaltet sich jedoch als einfacher – ins-

¹⁴ Nicht für die Schule, sondern für das Leben lernen wir.

¹⁵ Entgegen der Bezeichnung „Logarithmentafel“ enthält ein solches Nachschlagewerk in der Regel auch Tafeln mit weiteren Werten, beispielsweise trigonometrische Funktionen, Potenzen oder Wurzeln. Wer kein Elektronengehirn sein Eigen nennt und wer beispielsweise häufig Sinüsse, Cosinüsse und andere Nüsse zu knacken hat, dem sei ein solches Werk ans Herz gelegt. Eine gute Logarithmentafel findet man heutzutage jedoch häufig nur noch im Antiquariat.

besondere als wesentlich einfacher als „Tick, Trick und Tracks Aufgabe“. Leider sind uns Donaldisten wichtige Informationen, welche zur Lösung des Problems benötigt würden, nicht überliefert; der Rechenweg kann dennoch nachvollzogen werden und wird im Folgenden dargestellt.

Zunächst eine Bestandsaufnahme über die gegebenen und gesuchten Informationen:

- Über die führerlose Lokomotive ist bekannt, dass sie sich mit einer konstanten Beschleunigung von 2 Stundenkilometern pro Minute bewegt und bereits seit exakt 7 Minuten unterwegs ist. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Anfahrt aus dem Stillstand erfolgte.
- Über den Eilzug E33 gibt es bedeutend weniger Informationen. Genau genommen werden uns für die Fragestellung des Zusammenstoßes gar keine relevanten Informationen überliefert. Wir können aber von der Annahme ausgehen, dass dessen Geschwindigkeit konstant ist, da sich die Rahmenbedingungen nicht ändern (konstante Steigung, konstanter Rückenwind) und keine dem widersprechenden Informationen berichtet werden.
- Eminent wichtig ist die Entfernung zwischen der führerlosen Lokomotive und dem E33 zum Zeitpunkt der Eilmeldung oder zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt. Diese wird uns leider ebenfalls nicht überliefert.
- Gesucht sind Zeitpunkt und Ort der Kollision.

Es ist zu beachten, dass zwar uns, den Lesern des Berichts „Die Zugkatastrophe“, die benötigten Informationen nicht vollständig vorliegen, sie jedoch demjenigen bekannt sind, der die Eilmeldung in Gänze mitbekommen hat. Andernfalls wären Tick, Trick und Track nicht in der Lage, die Lösung zu berechnen.

Wird das Problem in die zu Beginn dieses Artikels verwendete Terminologie übersetzt, so lautet es wie folgt:

Die Geschwindigkeitsfunktionen $v_1(t)$ und $v_2(t)$ sind prinzipiell bekannt, ebenso die Entfernung der beiden Züge, bezeichnet sei sie mit S . Unbekannt ist der Zeitpunkt des Zusammentreffens, T , sowie der Ort der Kollision bzw., gleichbedeutend, die von den beiden Zügen bis zum Zusammenstoß zurückgelegten Entfernungen, $s_1 = s_1(T)$ und $s_2 = s_2(T)$. $t = 0$ ist der Zeitpunkt der Fernsehübertragung. Es gilt: $S = s_1 + s_2$.

Der Rechenweg lautet nun wie folgt (dabei haben t bzw. T im Folgenden die Einheit Minuten, ebenso wie die Zahl 7):

Die Geschwindigkeit der führerlosen Lokomotive folgt der Gesetzmäßigkeit¹⁶: $v_1(t) = a \cdot (t + 7)$ mit der Beschleunigung

$$a = 2 \text{ km/h/min} = \frac{1}{30} \text{ km/min}^2$$

$v_2(t)$ ist uns unbekannt. Entsprechend der obigen Annahme kann die Funktion aber als konstant angesehen werden: $v_2(t) = v$ für alle t im Betrachtungszeitraum.

Mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kann nun T berechnet werden:

$$\begin{aligned} S &= s_1 + s_2 = \int_0^T v_1(t) dt + \int_0^T v_2(t) dt \\ &= \int_0^T a \cdot (t + 7) dt + \int_0^T v dt \\ &= \left[\frac{1}{2} at^2 + 7at + vt \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} aT^2 + 7aT + vT. \end{aligned}$$

Umgeformt ergibt dies die folgende quadratische Gleichung in der Variablen T :

$$\frac{1}{2} aT^2 + (7a + v)T - S = 0.$$

Dessen zwei reelle Lösungen werden mit der „Mitternachtsformel“, der Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen, bestimmt:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{-(7a + v) + \sqrt{(7a + v)^2 + 2aS}}{a} \\ T_2 &= \frac{-(7a + v) - \sqrt{(7a + v)^2 + 2aS}}{a} \end{aligned}$$

Offenbar ist T_2 negativ und somit für diese Aufgabe nicht relevant. Ergo ist T_1 die gesuchte Lösung. Sie gibt die Dauer bis zur Kollision an, bezogen auf den Zeitpunkt der Fernsehübertragung.

Aus T_1 kann nun ganz bequem der Kollisionspunkt der beiden Züge berechnet werden. Dieser befindet sich zum Zeitpunkt der Eilmeldung genau

$$S - s_1(T_1) = S - \int_0^{T_1} v_1(t) dt = S - \frac{1}{2} aT_1^2 - 7aT_1$$

Kilometer vor dem Personenzug und exakt

$$S - s_2(T_1) = S - \int_0^{T_1} v_2(t) dt = S - vT_1$$

Kilometer vor der führerlosen Lokomotive. Nun kann beispielsweise ein Streckenbuch die Position auf der Karte und die Zuordnung zu den Streckenblöcken liefern.

¹⁶ Für die Geschwindigkeit eines gleichmäßig beschleunigten Objekts aus der Ruhelage gilt: $v = a \cdot t$, wobei v die Geschwindigkeit, a die Beschleunigung und t die Zeit beschreibt.



Tick, Trick und Track bestimmen den Zusammenstoß auf den Meter und auf die Sekunde genau.¹⁷

Die Genauigkeit der Lösung

Es ist bemerkenswert, mit welcher Präzision der Ort des Zusammenpralls berechnet wurde. Aber nur aufgrund dieses exakten Ergebnisses konnte das Unglück durch punktgenaues Platzieren von Onkel Dagoberts Matratzen verhindert werden. Denn der führerlose, konstant beschleunigte Zug legt bereits zum Zeitpunkt der Eilmeldung innerhalb einer Sekunde 3,9 Meter zurück, d.h. er benötigt für 10 Meter lediglich etwa 2,5 Sekunden. Nach weiteren 10 Minuten sind es sogar schon etwa 9,4 Meter pro Sekunde bzw. ungefähr eine Sekunde für 10 Meter.



Demgegenüber wäre es äußerst unpräzise, wenn Tick, Trick und Track am Telefon die Lösung nur auf Minuten gerundet angeben würden. Der Zusammenstoß geschieht also zum Zeitpunkt 23 Uhr 52 Minuten 0 Sekunden, wovon im Übrigen auch die Helikopterpiloten ausgehen.



Um diese Genauigkeit zu erreichen, müssen Tick, Trick und Track die oben dargestellte Wurzel zur Berechnung

¹⁷ Diese Werte für den Zeitpunkt und den Ort der Kollision sind für uns irdische Donaldisten, die wir nicht die gesamte Eilmeldung kennen, nicht berechenbar. Das akademische Interesse an der Existenz der Lösung und seines Lösungswegs sollte aber trotzdem gestillt sein, sodass nun sicherlich die wenigsten Leser nach konkreten Zahlen verlangen.

von T_1 auf mehrere Nachkommastellen genau berechnen. Möglicherweise verwenden sie hierfür, in Ermangelung eines häuslichen Elektronengehirns, ihre Logarithmentafel.

n	n ²	n ³	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
← 1 →	← 2 →	← 3 →	← 1/2 →	← 1/3 →	→ 1 ←	← 1 →	← 2 →	← 1 →
0	0	0	—	—	—	0,000	0,00 0	0
1	1	1	1,0000	1,0000	1 000,0000	3,142	0,78 5	1
2	4	8	1,4142	1,2599	500,0000	6,283	3,14 2	2
3	9	27	1,7321	1,4422	333,3333	9,425	7,06 9	3
4	16	64	2,0000	1,5874	250,0000	12,566	12,56 6	4
5	25	125	2,2361	1,7100	200,0000	15,708	19,63 5	5
6	36	216	2,4495	1,8171	166,6667	18,850	28,27 4	6
7	49	343	2,6458	1,9139	142,8571	21,991	38,48 3	7
8	64	512	2,8284	2,0000	125,0000	25,133	50,26 5	8
9	81	729	3,0000	2,0801	111,1111	28,274	63,61 7	9
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	100,0000	31,416	78,54 0	10
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	90,9091	34,558	95,03 3	11
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	83,3333	37,699	113,09 7	12
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	76,9231	40,841	132,73 2	13
14	1 96	2 744	3,7417	2,4101	71,4286	43,982	153,93 8	14
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	66,6667	47,124	176,71 3	15
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	62,5000	50,265	201,06 2	16
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	58,8235	53,407	226,98 0	17
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	55,5556	56,549	254,46 9	18
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	52,6316	59,690	283,52 9	19
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	50,0000	62,832	314,15 9	20
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	47,6190	65,973	346,36 1	21
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	45,4545	69,115	380,13 3	22
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	43,4783	72,257	415,47 6	23
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	41,6667	75,398	452,38 9	24
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	40,0000	78,540	490,87 4	25
26	6 76	17 576	5,0990	2,9623	38,4615	81,681	530,92 9	26
27	7 29	19 683	5,1962	3,0000	37,0370	84,823	572,55 3	27
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	35,7143	87,965	615,75 2	28
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	34,4828	91,106	660,52 0	29
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	33,3333	94,248	706,85 8	30

Exemplarischer Auszug aus einer Logarithmentafel. Die vierte Spalte gibt die Werte für $\sqrt{0}$ bis $\sqrt{1000}$ auf 4 Nachkommastellen genau an (verteilt auf mehrere Seiten; hier nicht vollständig abgebildet).

Dies ist aber nur die eine Seite der Medaille: Für die Bestimmung der exakten Unglücksstelle im Fichtelgebirge muss auch der TV-Sprecher die absoluten und die relativen Positionen sowie die Geschwindigkeiten der Züge auf die Sekunde und auf den Meter genau durchgeben. Dies erfordert eine beeindruckende Präzision seitens der Fahrdienstleitung und des TV-Sprechers.

Ausblick und offene Fragen

Die Welt der Eisenbahn ist vielfältig, auch in Entenhäusen. Dies machen bereits die im Exkurs dargestellten unterschiedlichen Typen an Lokomotiven und Waggons deutlich. Auch die vielen verschiedenen Formsignale machen neugierig. Diese unterscheiden sich beispielsweise in der Anzahl ihrer Leuchten, der Form der Flügel, der Bauweise des Mastes und der Gestalt der Mastspitze. Auch die Signale unterscheiden sich in ihren Bedeutungen und es ist noch unbekannt, welche Funktion die Scheibensignale besitzen, die an eingleisigen Streckenstücken platziert sind.

Ganz allgemein sind Unterschiede zwischen der stellanaischen und der irdischen Eisenbahn erkennbar. So wird beispielsweise Donald in „Der heldenmütige Stationsvorstand“, [6], als der Stationsvorsteher eines Bahnhofs beschrieben. Gemäß §4 der deutschen Eisenbahn-Bau- und Betriebsordnung (EBO) handelt es sich jedoch mitnichten um einen Bahnhof, sondern lediglich um einen Haltepunkt. Es ist sicherlich ein lohnendes Unterfangen, die verschiedenen Eisenbahnsysteme hinsichtlich weiterer Unterschiede zu untersuchen.



[1]

Möglicherweise werden auch die zulässigen Fahrgeschwindigkeiten auf Stella anatum anders geregelt.

Auch dieses Panel wirft Fragen auf:



Die Uhr zeigt etwa 21.25 Uhr und die Fahrdienstleitung schätzt den Zusammenstoß entsprechend auf 21.40 Uhr. Der Zusammenstoß erfolgt jedoch um 23.52 Uhr. Da die Fahrdienstleitung den Streckenabschnitt „Schiefe Ebene“ kennt und entsprechend einschätzen kann, welche Zeit es in Anspruch nimmt, diese zu durchfahren, ist es unwahrscheinlich, dass zwischen diesem Panel und der Kollision über 2 Stunden liegen. Wahrscheinlicher ist, dass die Uhr eine andere Zeitzone anzeigt.¹⁸ Gibt es auf Stella anatum und insbesondere im Umland von Entenhausen tatsächlich unterschiedliche Zeitzonen? Und wenn ja, wie verlaufen deren Grenzen?

Diese und weitere Fragen im Zusammenhang mit dem Entenhausener Eisenbahnbetrieb konnten im Rahmen dieses Artikels nicht beantwortet werden. Hoffentlich inspiriert mein Beitrag jedoch zu weiterer Eisenbahnforschung – vielleicht ja sogar während einer Zugfahrt (wenn das Auto Urlaub macht).



[16]

¹⁸ Dies ist nicht so absurd, wie es auf den ersten Blick scheinen mag. Auf unserem Planeten gab es im Deutschen Reich des 19. Jahrhunderts über 30 Zeitzonen, bis diese aufgrund des zunehmenden Eisenbahnverkehrs 1893 vereinheitlicht wurden.

Literaturverzeichnis

Der Artikel verweist auf die folgenden Berichte von Carl Barks und Erika Fuchs:

- [1] „Das Geheimnis von Hondurica“ in BL-DO 22
- [2] „Das Goldschiff“ in BL-OD 22
- [3] „Das Horoskop“ in BL-WDC 29
- [4] „Der Eilbrief“ in BL-WDC 23
- [5] „Der Glühwürmchenfänger“ in BL-DÜ 2
- [6] „Der heldenmütige Stationsvorstand“ in BL-WDC 25
- [7] „Der Rinderkönig“ in BL-OD 36
- [8] „Die Freuden des Drachensteigenlassens“ in BL-WDC 8
- [9] „Die Jagd nach der Brosche“ in BL-DO 16
- [10] „Die tollen Trapper“ in BL-WDC 2
- [11] „Die Zugkatastrophe“ in BL-WDC 32
- [12] „Eine dunkle Story aus dem dunklen Erdteil“ in BL-OD 14
- [13] „Erntedankfest“ in BL-WDC 9
- [14] „Gefährliches Spiel“ in BL-DO 17
- [15] „Im Land der Vulkane“ in BL-DO 5
- [16] „Jagd nach der Roten Magenta“ in BL-DO 20
- [17] „Lockende Ferne“ in BL-WDC 45
- [18] „Weihnachten in Entenhausen“ in BL-DO 23
- [19] „Wie du mir, so ich dir“ in BL-WDC 9

Ferner wird auf das folgende Sonderheft verwiesen:

- [20] J. Wollina: „Der einzig wahre Stadt- und Umgebungsplan von Entenhausen“, DDSH 55, 2008

Darüber hinaus gibt es drei nicht-donaldistische Bildquellen:

- [21] F. G. Gauß: „Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln“, Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer, 1969
- [22] <https://www.ruehlin.ch/werkeindex/1993%20-%20Federmotor%20-%20Karton%20Acryl%20-%20ca%2060x30x120cm.jpg>, aufgerufen am 09.08.2024
- [23] <http://www.arstechnica.de/auto/differential/bahn.gif>, aufgerufen am 09.08.2024

Sofern nicht anders angegeben, stammen die abgebildeten Panels aus dem Bericht „Die Zugkatastrophe“, [11].

Danksagung

Auf meinem ersten Kongress 2019 in Freiburg wurde mir der Donaldist Ralph Hössel vorgestellt, der mich auf den mir damals noch unbekanntem Bericht „Die Zugkatastrophe“ aufmerksam machte und als einen lohnenden, meinen Interessen entsprechenden Forschungsgegenstand bewarb. Obgleich die Bearbeitung nun, nach mehreren Pausen und einigen Rückschlägen, unerwartet viel Zeit in Anspruch genommen hat, war sie der Beginn meines donaldistischen Schaffens. Und dem in Freiburg geschaffenen Kontakt verdanke ich die Zugehörigkeit zum Frankfurter Stammtisch G.R.Ü.N.E. S.O.S.S.E.. Aus diesem Grund widme ich den vorliegenden Artikel meinem sehr geschätzten Stammtischkollegen Ralph.